Exercices et problèmes

Dans tous les exercices le plan est orienté dans le sens direct.

1 Soit ABC un triangle équilatéral de centre G tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Déterminer, dans chacun des cas, le rapport et l'angle de la similitude directe f.
a. f fixe B et envoie A sur C.
b. f fixe B et envoie C sur G
c. f fixe G et envoie B sur C.

2 1. Soit S une similitude directe. Donner la nature de $S \circ f \circ S^{-1}$ dans chacun des cas ci-dessous.
a. f est une translation de vecteur non nul.
b. f est une rotation d'angle non nul.
c. f est une homothétie de rapport différent de 1.
d. f est une symétrie orthogonale d'axe passant par le centre de S.
2. Reprendre la question précédente en supposant que S est une similitude indirecte.

3 Soit ABCD un carré de côté 1, de centre O et tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

On note I le milieu de [AO].
1. a. Montrer qu'il existe une unique similitude directe S qui envoie A sur O et B sur I.
b. Déterminer le rapport et l'angle de S.
2. a. Donner l'écriture complexe de S dans le repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.
b. Déterminer le centre de S.

4 Soit ABC un triangle non isocèle , rectangle en A et tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

On désigne par H le projeté orthogonal de A sur (BC) et on note f la similitude directe qui envoie B sur A et A sur C.
1. Déterminer les éléments caractéristiques de f.
2. Soit M un point variable de [AB]. La perpendiculaire à (MH) menée de H coupe [AC] en N. Montrer que le cercle de diamètre [MN] passe par un point fixe.

5 Soit ABCD un carré de centre O et tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Soit S la similitude directe de centre D qui envoie O sur C.
1. Déterminer le rapport et l'angle de S.
2. Déterminer l'image du point A par S.
3. Construire l'image du point C par S.

6 Soit un triangle direct ABC et M un point du plan.
Soit S la similitude directe de centre A qui envoie B sur C.
Construire l'image de M dans chacun des cas ci-dessous.
1. Le point M n'appartient pas à (AB).
2. Le point M appartient à la droite (AB) privée des points A et B.

7 Soit ABC un triangle isocèle et rectangle en A tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On désigne par A' le symétrique de A par rapport à C.
1. a. Préciser le rapport et l'angle de la similitude directe S qui envoie A' sur C et C sur B.
b. Déterminer l'image par S de la droite (AC).
2. a. Soit I le centre de S. Montrer que le triangle ICB est rectangle isocèle.
b. Construire I.
c. Construire l'image du cercle de centre C et de rayon CA.

8 Soit ABCD un carré direct de centre O.
1. a. Préciser l'angle et le rapport de la similitude directe S qui envoie A sur O et B sur D.
b. Construire le centre de f.
c. Déterminer $S(D)$.
2. Existe-t-il une similitude directe qui envoie A sur O, B sur D et D sur C ?

9 Soit A et B deux points. On désigne par h l'homothétie de centre A et de rapport -2 et par r la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On pose $S = r \circ h$.
1. Montrer que S est une similitude directe et déterminer son rapport et son angle.
2. Soit O le centre de la similitude S et $A' = r(A)$.
a. Montrer que $(\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OA'}) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $OA' = 2OA$.
b. Construire le point O.
3. Soit $B' = h(B)$.
Construire le centre de la similitude $S' = h \circ r$ et préciser son angle et son rapport.